Fiche de cours : Développements limités des fonctions usuelles

Théorème (Formule de Taylor-Young).
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(a+\boldsymbol{x}) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}\boldsymbol{x} + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\boldsymbol{x^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\boldsymbol{x^n}}_{\text{polynôme de Taylor pris en } a+x} + o(\boldsymbol{x^n})$$

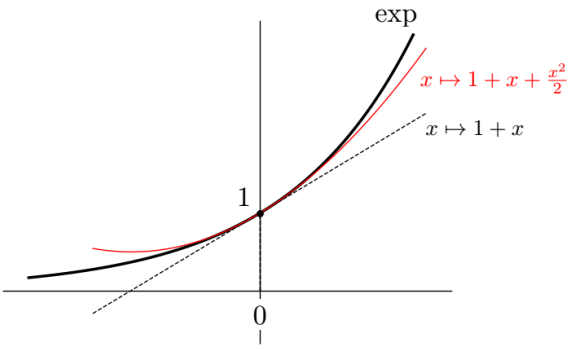
$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\boldsymbol{x^k} + o(\boldsymbol{x^n})$$

Autrement dit, le polynôme de Taylor de f (en a à l'ordre n) fournit au voisinage de a une approximation de f à l'ordre n.

Fonction exponentielle :

$$\boxed{\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

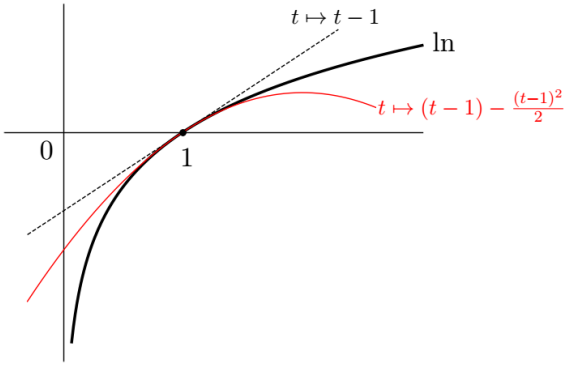
Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de exp en tout point a de $\mathbb{R}$, en écrivant $e^{a+x} = e^a.\boxed{e^x}$



Fonction logarithme :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

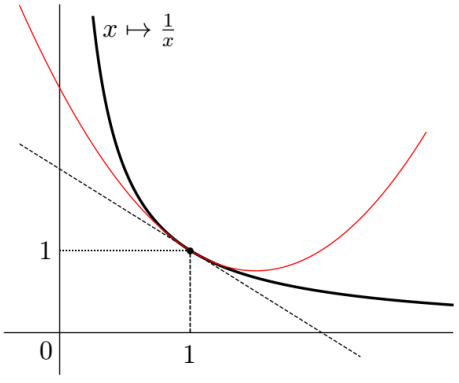
Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de ln en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$, en écrivant
$\ln(a+x) = \ln\left(a \times \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$
$= \ln(a) + \boxed{\ln(1+X)}$ avec $X = \frac{x}{a}$.



Fonction $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{x}}$:

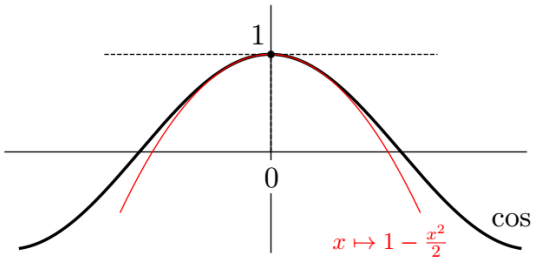
$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en tout point a de $\mathbb{R}^*$, en écrivant
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\left(\frac{-x}{a}\right)} = \frac{1}{a} \times \boxed{\frac{1}{1-X}}$ avec $X = \frac{-x}{a}$.

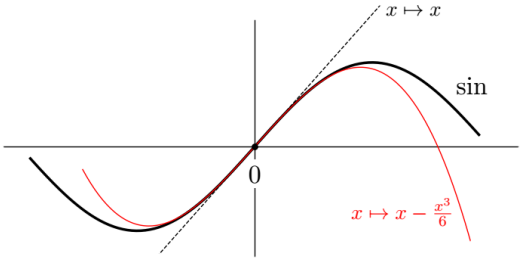


Fonctions cosinus et sinus :

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$



$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$



Ces formules permettent d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de cos et sin en tout point a de $\mathbb{R}$ en écrivant les formules d'addition :

$$\cos(a+x) = \cos(a)\boxed{\cos(x)} - \sin(a)\boxed{\sin(x)}$$

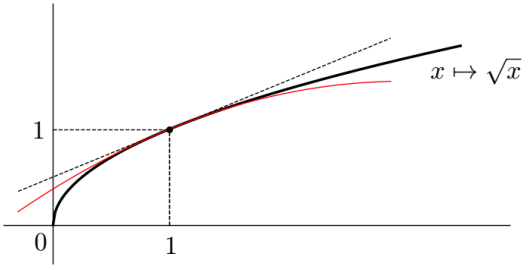
Fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Cette formule permet d'obtenir le $\mathrm{DL}_n(a)$ de $x \mapsto x^\alpha$ en tout point a de $\mathbb{R}_+^*$, en écrivant :

$$\begin{aligned}(a+x)^\alpha = \left(a \times \left(1 + \frac{x}{a}\right)\right)^\alpha &= a^\alpha \times \left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha \\ &= a^\alpha \times \boxed{(1+X)^\alpha}\end{aligned}$$

avec $X = \dfrac{x}{a}$.



Fonctions tan et Arctan :

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)}$$

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})} \qquad \left(\text{primitivation de } x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$$

Fonctions ch et sh :

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

Il s'agit respectivement des monômes d'exposants pairs et impairs du DL de la fonction exp.

Equivalents fondamentaux :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x, \\ \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x\end{array}}$$